14. *Über Präzisionsnormale der Selbstinduktion; von F. Dolezalek.*

Die Messung der für den Verlauf von Wechselströmen maßgebenden Konstanten der Selbstinduktion, der Kapazität und der gegenseitigen Induktion kann geschehen durch Vergleich gegen einen Normalkondensator oder gegen ein Normal der Selbstinduktion. Der Kondensator ist, wie bereits mehrfach[1]) hervorgehoben, wegen seiner großen Veränderlichkeit mit der Zeit erheblich weniger geeignet ein Präzisionsnormal zu bilden, als die von den genannten Einflüssen fast unabhängige Selbstinduktionsspule; Präzisionsmessungen der Induktionskonstanten führt man daher am zweckmäßigsten durch Vergleich gegen ein Selbstinduktionsnormal aus. Die Selbstinduktionsnormalien haben mithin für Wechselstrommessungen eine gleich große Bedeutung, wie Widerstandsnormalien für Gleichstrommessungen. Man muß an dieselben daher die gleichen Anforderungen der Präzision stellen wie an Widerstandsnormalien.

Der Umstand, daß die Siemens & Halske A.-G. jetzt die Herstellung von Präzisionsnormalien der Selbstinduktion in ihre Fabrikation aufgenommen hat, gab mir Veranlassung zu der nachstehenden Untersuchung.

Die Spannungsdifferenz an den Polen einer Drahtspule mit dem Selbstinduktionskoeffizienten L und dem Widerstande R beträgt bei Durchgang eines mit der Zeit t veränderlichen Stromes J bekanntlich:

$$V = R\,J + L\,\frac{\partial J}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Für einen periodischen Strom von der Form

$$J = e^{ipt} \qquad \begin{array}{l}(i = \sqrt{-1})\\ (p = \text{Perioden in } 2\pi \text{ Sekunden})\end{array}$$

ist daher

$$V = R\,e^{ipt} + i\,p\,L\,e^{ipt} = (R + i\,p\,L)\,.\,J. \tag{2}$$

1) Vgl. z. B. E. Orlich, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. p. 502. 1903.

Die Induktionsspule verhält sich dem Strom e^{ipt} gegenüber wie eine induktionsfreie Spule mit dem Widerstand $(R + ip\,L)$.

Von einem Selbstinduktionsnormal muß man daher verlangen, daß die den „Widerstandsoperator" $(R + ip\,L)$ zusammensetzenden Größen, nämlich Widerstand R und Selbstinduktion L möglichst unabhängig sind von Zeit und Temperatur sowie besonders von der Frequenzgröße p des Wechselstromes. Es ist bekanntlich das große Verdienst von M. Wien[1]), derartige Normalien zuerst hergestellt und Methoden zu ihrer genauen absoluten Bestimmung[2]) ausgebildet zu haben. Bei der Prüfung dieser von W. Siedentopf in Würzburg angefertigten Normalien auf die erwähnten Bedingungen zeigte es sich, daß bei niedrigen Periodenzahlen Selbstinduktion und Widerstand vorzüglich konstant und der gemessene Widerstandsoperator für verschiedene Periodenzahlen mit den berechneten übereinstimmt. Als ich jedoch diese Prüfung auf Frequenzen von über 300 Perioden ausdehnte, ergaben sich mit zunehmender Frequenz steigende Abweichungen. Wurden in der Wechselstrombrücke zwei Normalien mit verschieden starkem Draht verglichen, so wies das Normal mit dickerem Draht eine deutliche Zunahme des Widerstandes mit der Frequenz auf und ergab etwas schwankende Werte der Selbstinduktion. Eine Berechnung lehrte, daß diese Abhängigkeit auch nicht annähernd durch die Kapazität der Spulen zu erklären war. Es blieb daher zur Erklärung nur die Annahme einer bei höheren Frequenzen auftretenden ungleichmäßigen Verteilung der Stromlinien im Leiterquerschnitt oder die Entstehung von Wirbelströmen in benachbarten Metallmassen übrig. Die Vermutung, daß hieran wesentlich die auf den Steinrollen befindlichen Klemmschrauben beteiligt sind, erwies sich insofern als richtig, als nach Entfernung derselben die Abweichungen geringer wurden. Es blieb jedoch eine starke Abhängigkeit des Widerstandes von der Periodenzahl bestehen und dieselbe verschwand erst, nachdem an Stelle des massiven Drahtes ein Seil aus dünnen, voneinander isolierten Drähten gesetzt wurde, wodurch dem Auftreten von Wirbelströmen und der ungleich-

1) M. Wien, Wied. Ann. **58**. p. 553. 1896.
2) M. Wien, Wied. Ann. **44**. p. 689. 1891.

mäßigen Verteilung der Stromlinien im Kupferdraht selbst vorgebeugt wurde.

1. Einfluß der Periodenzahl auf den Widerstand.

Nachdem die Ursache der Abweichungen erkannt war, konnte eine quantitative Prüfung leicht vorgenommen werden. Zu diesem Zwecke wurde in der Wechselstrombrücke (Fig. 1) eine Selbstinduktionsspule mit massivem Kupferleiter (L_1) gegen eine Spule mit unterteiltem Leiter bei verschiedenen Periodenzahlen gemessen. Zweig 1 enthielt außerdem noch einen induktionsfreien Widerstandskasten W_1. Die Verbindung zwischen Zweig 1 und 2 war durch einen dicken Manganindraht D mit Schleifkontakt hergestellt, um die Widerstandseinstellung bis auf 0,01 Ohm ausführen zu können. Als Nullinstrument diente ein Hörtelephon und als Stromgenerator eine Wechselstrommaschine für hohe Frequenzen in der Form, wie ich sie kürzlich beschrieben habe.[1]) Die Ausführung der Messung geschah in der Weise, daß zunächst durch Verstellen am Schleifkontakt, sowie durch Ziehen von Widerstand in W_1 und Verschiebung des Widerstandskontaktes in bekannter Weise ein scharfes Telephonminimum eingestellt wurde. Aus dem Brückenverhältnis, den Widerständen der Brückenzweige und dem Selbstinduktionswert der Litzenspule ergibt sich der Wechselstromwiderstand R_1 und die Selbstinduktion L_1 der Drahtspule. Wird alsdann die Wechselstromquelle mit einer Gleichstromquelle, das Telephon mit einem Galvanoskop vertauscht und durch Verschieben am Widerstandskontakt wieder auf Stromlosigkeit in der Brücke eingestellt, so erhält man auch den Gleichstromwiderstand R

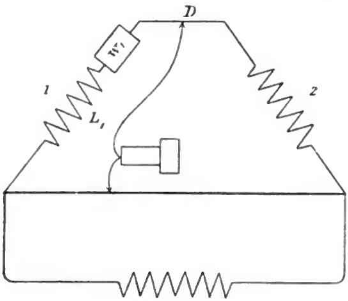

Fig. 1.

1) F. Dolezalek, Zeitschr. f. Instrumentenk. **23.** p. 240. 1903.

der Drahtspule. Die Differenz $R_1 - R$ ergibt die Zunahme des Widerstandes infolge von ungleichförmiger Verteilung der Stromlinien im massiven Draht und Wirbelströmen. Der Leiter der Vergleichsspule bestand aus einer Kupferlitze von 72 isolierten Drähten von je 0,1 mm Stärke. Wie aus der nachstehenden Untersuchung hervorgeht, konnte der Widerstand und die Selbstinduktion dieser Spule als hinreichend unabhängig von der Frequenz angenommen werden. Messungen wurden an Spulen von ca. 0,03 Henry aus 1,1 und 0,85 mm starkem Draht ausgeführt. Die Resultate enthält nachstehende Tabelle.

	Perioden pro Sekunde	Selbstinduktion Henry	Gleichstromwiderstand Ohm	Wechselstromwiderstand gemessen	Wechselstromwiderstand berechnet
Normal aus 1,1 mm starkem Draht	591	0,0325	4,83	5,43	5,45
	917	0,0325	4,83	6,32	6,32
	1452	0,0325	4,83	8,54	8,56
	2286	0,0325	4,83	14,13	14,08
Normal aus 0,85 mm starkem Draht	643	0,0330	6,96	7,34	7,33
	1000	0,0330	6,96	7,86	7,87
	1433	0,0330	6,96	8,83	8,82
	1893	0,0330	6,96	10,21	10,20
	2272	0,0330	6,96	11,63	11,63

Die Widerstandszunahme steigt mit dem Quadrat der Frequenz an, so daß für den Wechselstromwiderstand R' die Gleichung gilt:

$$R' = R + k n^2, \tag{3}$$

worin k eine Konstante, R den Gleichstromwiderstand und n die Frequenz bedeutet. Die letzte Kolumne obiger Tabelle enthält die nach dieser Gleichung berechneten Werte des Wechselstromwiderstandes. Bei der Spule aus 1,1 mm starkem Draht wurde $k = 1,77 . 10^{-6}$, bei derjenigen aus 0,85 mm starkem Draht $k = 0,905 . 10^{-6}$ eingesetzt. Die Widerstandszunahme ist hiernach selbst bei einer Spule von 0,85 mm starkem Draht und nur 0,03 Henry ganz bedeutend, so daß der Wechselstromwiderstand bei 2773 Perioden doppelt so groß ist wie der Gleichstromwiderstand. Bei der Spule aus 1,1 mm starkem Draht wird die Verdoppelung des Widerstandes bereits bei

1652 Perioden erreicht. Bei größeren Selbstinduktionswerten sind die Widerstandszunahmen natürlich gleichfalls beträchtlicher.

2. Einfluß der Drahtstärke.

Um den Einfluß der Drahtstärke genauer kennen zu lernen, wurden auch noch Messungen an Spulen von 0,55 und 2,0 mm starkem Kupferdraht vorgenommen. Reduziert man die erhaltenen k-Werte auf gleiche Selbstinduktion, so ergibt sich folgendes:

0,55 mm starker Draht	$k = 0{,}37 \cdot 10^{-6}$	für 0,03 Henry.
0,85 „ „ „	$k = 0{,}82 \cdot 10^{-6}$	
1,10 „ „ „	$k = 1{,}64 \cdot 10^{-6}$	
2,00 „ „ „	$k = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$	

Hiernach würde die Widerstandszunahme noch etwas schneller als mit dem Quadrat der Drahtstärke ansteigen. Vermutlich ist jedoch auch die Gestalt der Spule von Einfluß, so daß einfache genaue Gesetzmäßigkeiten in dieser Beziehung nicht zu erwarten sind. Aus den obigen k-Werten ist jedoch zu erkennen, daß der Einfluß der Frequenz auf den Widerstand bei Verwendung von 0,1 mm starkem Draht bereits nur noch von der gleichen Größenordnung ist, wie der Einfluß geringer Temperaturschwankungen. Eine weitere Unterteilung des Leiters hätte erst Zweck, wenn es gelänge, eine gut leitende Metalllegierung mit geringem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes herzustellen. Infolgedessen werden die neuen Präzisionsnormalien der Siemens & Halske A.-G. aus einem Seil von 0,1 mm starken Drähten angefertigt.

3. Einfluß der Frequenz auf die Selbstinduktion.

Die starke Veränderung, welche der Widerstand einer Spule mit massivem Leiter bei steigender Frequenz aufweist, ließ auch eine Beeinflussung des Selbstinduktionswertes vermuten. Die Messung gegen ein Normal mit Litzenbewickelung ergab an einer Spule aus 2,0 mm starkem Draht folgende Werte:

825 Perioden	0,03194 Henry
1650 „	0,03176 „

Die Selbstinduktion fällt also mit zunehmender Frequenz ein wenig ab. Der Einfluß der Frequenz ist jedoch sehr gering und macht sich erst bei sehr starken Leitern oder hohen Werten der Selbstinduktion störend bemerkbar.

Wie in Abschnitt 5 abgeleitet, bewirkt die Kapazität der Spule ein geringes Ansteigen der Selbstinduktion mit zunehmender Frequenz. Die Abnahme der Selbstinduktion würde also ohne den Kapazitätseinfluß noch etwas größer sein.

Die Abnahme der Selbstinduktion ist höchst wahrscheinlich durch das Zusammendrängen der Stromlinien innerhalb des Leiterquerschnittes nach der Spulenachse hin zu erklären. Setzt man den Leiter aus einzelnen sehr dünnen Drähten zusammen und verseilt diese mit hinreichend kurzem Drall, so ist die von den einzelnen Drähten innerhalb jeder Windung umschlossene Kraftlinienzahl dieselbe und daher eine unsymmetrische Verteilung der Stromlinien ausgeschlossen.

4. Absolute Messungen.

Wie soeben erörtert, ist die Veränderung der Selbstinduktion einer Spule mit massivem Leiter bei steigender Frequenz relativ gering. Dies ändert sich jedoch, sobald auch der Widerstand der Spule auf den zu messenden Selbstinduktionswert von Einfluß ist. Dies tritt z. B. ein, wenn man die Messung an einem Normal mit parallel geschaltetem induktionsfreien Widerstand auszuführen hat, wie es bei der absoluten Bestimmung von Selbstinduktionen nach der Wienschen Methode der Fall ist.

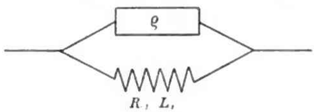

Fig. 2.

Der Widerstandsoperator a einer derartigen Stromverzweigung (Fig. 2) ergibt sich aus den Widerstandsoperatoren der Zweige:

$$a_1' = \varrho, \quad a_1 = R_1 + i p L_1 \text{ (vgl. oben)}$$

zu

$$a = \frac{a_1 \cdot a_1'}{a_1 + a_1'} = \frac{\varrho (R_1 + i p L_1)}{R_1 + \varrho + i p L_1} = R' + i p L'. \tag{4}$$

R' ist der wirksame Widerstand und L' die wirksame Selbstinduktion der Verzweigung. Letztere berechnet sich zu:

$$L' = \frac{\varrho^2 \cdot L_1}{(R_1 + \varrho)^2 + p^2 L_1^2}. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck enthält den Spulenwiderstand R_1 und kann also nur bei Verwendung von unterteiltem Leiter genaue Werte geben.

Auf Anwendung der Beziehungen (4) und (5) beruht die Methode von Wien zu absoluten Bestimmungen von Selbstinduktionen. Dieselbe wird in der Wechselstrombrücke nach dem Schema Fig. 3 ausgeführt. AB ist ein auf einer Teilung ausgespannter Meßdraht. Die Zweige 1 und 2 enthalten je eine Induktionsspule mit den Koeffizienten L_1 und L_2 und den Widerständen R_1 und R_2 und außerdem je einen induktionsfreien Widerstandssatz. Der letztere befindet sich in

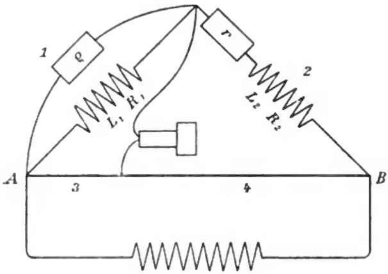

Fig. 3.

Zweig 1 in Parallelschaltung, in Zweig 2 dagegen in Hintereinanderschaltung mit der Spule.

Hat man durch Verschieben des Schleifkontaktes und Ziehen von Widerstand in beiden Zweigen die Brücke stromlos gemacht, so gilt die Gleichung

$$a_1 \,.\, a_4 - a_2 \,.\, a_3 = 0\,,$$

wenn a_1 bis a_4 die Widerstandsoperatoren der vier Brückenzweige bedeuten. Bezeichnet man das Verhältnis der Meßdrahtabschnitte mit e, so ist $a_3/a_4 = e$ und daher

$$a_1 - a_2\, e = 0. \tag{6}$$

Der Widerstandsoperator a_1 wurde oben berechnet (Gleichung (4)), derjenige von Zweig 2 beträgt $a_2 = r + R_2 + i\, p\, L_2$, wenn im Zweig 2 ein Widerstand von r gezogen wurde. Substituiert man diese Werte in Gleichung (6), trennt reellen und imaginären Teil und setzt dieselben einzeln gleich Null, so erhält man als Nullbedingung die beiden Gleichungen

$$p^2 L_1 L_2 = (r + R_2) - \frac{R_1 \varrho}{e}, \tag{7}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\varrho + R_1}{\varrho / e - (r + R_2)}, \tag{8}$$

aus welchen sich L_1 und L_2 einzeln berechnen lassen. Diese Gleichungen enthalten die Spulenwiderstände und müssen daher fehlerhafte Werte ergeben, wenn sich der Wechselstromwiderstand von dem der Berechnung zu Grunde gelegten Gleichstromwiderstand unterscheidet, wie es bei Verwendung von Spulen mit massivem Leiter der Fall ist.

Um diese Fehlerquelle experimentell zu prüfen, habe ich gemeinsam mit den Herren Bartels und Kaspareck an der oben erwähnten Spule aus 1,1 mm starkem Draht (0,0325 Henry) absolute Messungen bei verschiedenen Periodenzahlen ausgeführt.

Als Stromquelle diente die oben erwähnte Wechselstrommaschine, Nullinstrument war ein gewöhnliches Hörtelephon. Der Brückendraht war sorgfältig kalibriert worden. In Ermangelung geeigneter Stimmgabeln mußte die Bestimmung der Frequenz durch Tourenzählen der Maschine ausgeführt werden. Hierdurch kann ein Fehler von etwa 0,3 Proz. im Resultat herbeigeführt werden. Nachstehend sind Ergebnisse der Messung bei zwei verschiedenen Frequenzen wiedergegeben.

953 Perioden	1484 Perioden
R_1 = 4,833	4,747 Ohm
$r + R_2$ = 100,7	82,54 „
ϱ = 500,0	1570 „
e = 0,6949	0,7806
L_1 = 0,0328	0,0336 Henry
L_2 = 0,0402	0,0412 „

Die Unterschiede in den R_1-Werten sind durch Veränderung der Zimmertemperatur verursacht. Die berechneten Selbstinduktionskoeffizienten unterscheiden sich um mehr als 2 Proz. voneinander und zwar steigen sie mit zunehmender Frequenz an.

Es ist nun leicht zu erweisen, daß dieser Anstieg nur durch die Verwendung eines massiven Leiters in der Spule L_1

herbeigeführt ist. Setzt man nämlich in die Gleichungen (7) und (8) nicht den Gleichstromwiderstand R_1 ein, sondern den mittels Gleichung (3) für die betreffende Periodenzahl berechneten Wechselstromwiderstand, so eliminiert man den Fehler und muß für alle Frequenzen richtige Werte erhalten.

Die Berechnung des wirksamen Wechselstromwiderstandes nach der Gleichung

$$R_1' = R_1 + 1{,}77 \,.\, 10^{-6} \,.\, n^2$$

ergibt für 953 Perioden 6,44 Ohm, für 1484 Perioden 8,65 Ohm.

Nachstehend sind die mit und ohne Berücksichtigung der Widerstandszunahme der Drahtspule berechneten Werte zusammengestellt.

	953 Perioden	1484 Perioden
Mit R_1 berechnet	$L_1 = 0{,}0328$	0,0336 Henry
	$L_2 = 0{,}0402$	0,0412 „
Mit R_1' berechnet	$L_1 = 0{,}0325$	0,0326 „
	$L_2 = 0{,}0397$	0,0398 „

Die gute Übereinstimmung der letzten Wertepaare beweist klar, daß die erhaltenen Abweichungen nur durch die Widerstandszunahme in der Spule mit massivem Draht erzeugt wurden. Hieraus geht wiederum die Notwendigkeit hervor, Präzisionsnormalien nicht wie bisher aus massivem Draht zu wickeln, sondern hierzu ein Seil dünner und hinreichend voneinander isolierter Drähte zu verwenden.

5. Einfluß der Kapazität der Spulen.

Bei größeren Werten des Selbstpotentiales und Verwendung hoher Frequenzen wirkt die Kapazität der Drahtspulen störend auf die Messung ein, wie M. Wien theoretisch und experimentell erwiesen hat. Die hierdurch entstehende Fehlerquelle ist um so bemerkenswerter, als es unmöglich erscheint, dieselbe durch geeignete Anordnung der Wickelung gänzlich zu beseitigen. Durch Verwendung einer starken Isolationsschicht auf dem Draht und namentlich zwischen den Wickelungslagen läßt sich die Kapazität merklich vermindern, jedoch niemals gänzlich beseitigen. Man ist daher gezwungen, den Einfluß rechnerisch zu korrigieren und muß verlangen, daß auf jedem größeren Normal neben dem Eichwert auch die Größe der Kapazität angegeben ist.

Berechnet man den Widerstandsoperator einer mit Kapazität behafteten Spule, so erhält man für die effektive Selbstinduktion L' und für den effektiven Widerstand R' die nachstehenden Werte:

$$L' = \frac{L - p^2 c L^2 - c R^2}{(1 - p^2 c L)^2 + p^2 c^2 R^2}, \tag{9}$$

$$R' = \frac{R}{(1 - p^2 c L)^2 + p^2 c^2 R^2}, \tag{10}$$

worin L und R Selbstinduktion und Widerstand für sehr geringe Frequenzen, c die Spulenkapazität und p die mit 2π multiplizierte Periodenzahl des Meßstromes bedeutet.

Bei Frequenzen unter 3000 kommt bei den vorliegenden Verhältnissen nur das Glied $p^2 c L$ neben 1 in Betracht, so daß man mit den Näherungsgleichungen

$$L' = L(1 + p^2 c L), \tag{11}$$

$$R' = R(1 + 2 p^2 c L) \tag{12}$$

rechnen kann. Die Kapazität bewirkt also eine Vermehrung von Selbstinduktion und Widerstand und zwar steigt der Einfluß der Kapazität mit dem Quadrat der Frequenz und mit der ersten Potenz des Selbstpotentiales an.

Von den verschiedenen Methoden, welche zur Messung der Kapazität von Normalrollen prinzipiell anwendbar erscheinen, habe ich die nachfolgende als am einfachsten und zuverlässigsten gefunden. In Zweig 1 der Wechselstrombrücke (Fig. 1) wird die zu messende Spule, in Zweig 2 ein Normal von etwa zehnfach kleinerem Wert und vergleichsweise verschwindender Kapazität eingeschaltet. Man stellt alsdann mit einem Wechselstrom von geringer Frequenz p_1 (z. B. $p_1 = 2\pi . 200$) das Telephonminimum ein, wobei man zur Widerstandsabgleichung nicht bifilare Drahtwiderstände, sondern einen Satz geeigneter Glühlampen und den in der Figur gezeichneten Schleifdraht verwendet. Man erhält so einen Selbstinduktionswert L_1. Alsdann legt man an die Brücke einen etwa zehnfach schnelleren Wechselstrom von der Frequenz p_2 (z. B. $p_2 = 2\pi . 2000$) und erhält einen etwas größeren Wert L_2.

Da L_1 nahe gleich L, so folgt aus Gleichung (11) für die Kapazität der Normalrolle der Ausdruck

$$c = \frac{L_2 - L_1}{L_1^2 (p_2^2 - p_1^2)}.$$

Die Vergleichsmessungen von L_2 und L_1 kann man leicht auf Bruchteile eines Promille ausführen. Für die Kapazitätsbestimmung ergibt sich hieraus bei Normalien von 1 Henry und darüber eine Genauigkeit von einigen Prozenten, was für Korrektionszwecke völlig ausreicht.

Um einen Anhalt über die Größenordnung der Kapazität zu geben, sind nachstehend die Meßresultate an einem größeren Normal wiedergegeben. Dasselbe war aus einem gut unterteilten Leiter gewickelt und besaß einen Widerstand von 73 Ohm:

$$p_1 = 2\pi . 500, \quad L_1 = 0{,}9365 \text{ Henry},$$

$$p_2 = 2\pi . 2520, \quad L_2 = 0{,}9713 \quad \text{„} \; ,$$

hieraus folgt $c = 0{,}00016$ Mikrof.

Der Einfluß der Kapazität ist also bei hohen Frequenzen ganz beträchtlich und kann durchaus nicht vernachlässigt werden.

Auf den neuen Präzisionsnormalien der Siemens & Halske A.-G. ist daher neben dem Widerstands- und Selbstinduktionswert auch die Kapazität angegeben, so daß man mittels Gleichung (11) und (12) auch für hohe Frequenzen Widerstand und Selbstinduktion, d. h. den Widerstandsoperator, genau berechnen kann.

(Eingegangen 11. September 1903.)